理　論　電　気　磁　気　学

Ｍａｘ．Ｐｌａｎｃｋ著
寺澤　寛一　　酒井　佐明　　訳（Watson　改編）

§１．　遠達作用の原理、直達作用の原理

　力学的現象あるいは質点の運動に対して、電気的及び磁気的即ち電気力学的現象の全体は矢張り、それだけでまとまった画然区別された一部門を形成するものである。 そして此の両部門に依って物理学の全範囲が又包括されて居る：何故かというに、物理学に於ける他のあらゆる部門: 音響学、光学, 熱学は残らず結局は力学と電気力学とに帰着してしまうからである。ところで更に進んで此の二種の現象までも完全な最後の融合を遂げれば、まさに理論物理学の殿堂は王冠に輝くのであるが、之はなお将来に保留して置くよりほかはない。

ともあれ既に今日この両領域間をそれぞれ連絡せしめる架橋は若干存在して居る:なかでも、その最も重要な第一の橋は**エネルギー保存の原理**なので, 本書でもこれを出発点として辿る事とする。然し単に此の原理を使用するだけでは勿論なお確実な電気理論を握り締める把手にならない。そこで従来このエネルギー原理に立脚した種々の学説が唱え出され、それ等が時世に連れて鎬を削って来た様な次第である。本書で説明する理論はその基礎を「**マックスエル**」に発したもので、第二の根本概念として**媒達作用の原理**を採用するのが其の特徴である。此の原理に従えば、自然界には原因をなす作用が直接に遠い所に存在して居る事は決してないといふ事になる；即ち, 局所的の事件の効果が多少でも離れた場所に即座に, 途中に介在する物体をも飛び越えて現れて来る様な事は決してあり得ない。むしろ原因となる作用はすべて有限の速度を以て空間を点から点へと伝搬して行くのである。故に或る場所に於いて或る時刻に現れるあらゆる事件は、その直ぐ近くの場所に、その直ぐ前の時刻に於いて起った事件に依って完全に、かつ一義的に決定されるのである。

この定理は物理的原因の作用する仕方が最初から持っている可能性に対して本質的の制限を加えるものであるから、遠達作用原理と媒達作用原理とは決して同格に対立した学説であると考える事は出来ない。むしろ遠達作用原理の方は一般的で、媒達作用原理の方は特殊的のものと考えるべきである．それとまた関連した事は, 電気力学に於いては従来種々の遠達作用論が行われて来たが、媒達作用論では正にマックスエル」のが唯一つあるだけという事である。媒達作用論が結局他のすべての理論よりも卓越して居るゆえんは、元来、この理論が他の理論よりも“ 正しい”からだというのではなく，むしろこの理論がより決定的でかつ簡単だからと云うのにある。何故かと云うに，もし或る場所に於ける現象を計算しようとする際に、媒達作用論に従えば，原則として他の有限距離の場所にどんな事柄が起って居ようともそれに頓著なく，限界をその直接近隣に起った事件のみに限る事が出来るが, 若し遠達作用論を正当なものとして認容するときは、全宇宙内の何処かに目下計算せんとする現象に相当な影響を直接に与える様な処がありはしないだろうかと，隈なく探索して見る事が必要になって来る。

ここに於てか又我々は次の定理を是認せねばならぬ, 即ち:学説と云うものは一般的でなければない程、否、むしろ特殊的であればある程、そしてそれに関連したすべての質問に対して、なるべく決定的の解答を与え得るもの程、益々その任務に適応するものといって宜しい。適宜に予期する現象に就いて**一義的**言明を与えるのが学説たるものの任務なのである一一, 此の点は遺憾ながらしばしば理論的推理に際して等閑に附せられて居る。学説はそれに含まれたる未知の常数が少ないもの

程、多くを為し遂げるものである。

そこで今後の論説に於いても当然根本的に遠達作用論的の説明を却けねばならぬのであるが、さればとて, 既に導き終った結果は、その後これを遠達作用論の論法の形をかりて言い表す方が、しばしば後の機会に臨んでは便宜でもあり、又これを望む場合もあるので，これをも決して回避するものではない。かかる場合には決して媒達作用原理に矛盾して居るなどと言ってはならぬ。　実際例えば我々はよく太陽が昇るとか没するとかと言うけれども、それだからとて、太陽が地球の地球の周りを廻って運行している事を主張しようとする人は無い。同様に、今後帯電体は互に引力又は斥力を及ぼす、あるいは電流は羅針に振れを与えるなどと言っても宜しいが、この外見上の作用は当該２物体間に介在せる空間内に於ける無数の煩雑な現象が起こした簡単なる結果を表示するものであるという意味でかかる言葉を用いるのである。

第　一　篇
静止せる物体内の電磁場の一般方程式
第一章　　電場及び磁場の強さ

§ 2.　電場の強さ、電気エネルギー

封蝋あるいはエボナイトの棒を猫皮で摩擦すると, その棒は紙片、あるいは接骨木の髄で作った小球の如き, 小さな軽い物体を引き付けようとする性能を獲得する。この経験上の事実を科学的に解釈するには、摩擦された棒が小物体に引力を及ぼすのであるという様には解釈しないで、我々はむしろこれを媒達作用論の立場から解釈し, 次の如く言い表わす：摩擦された棒は, 先づこれを囲んでいる空気中に電場を起させ、従って：その電場内の各点は各々その場所特有の或る性質を帯びる事になり、次にこの電場が電場内に存在せる他のあらゆる物体にまた作用を及ぼすのであるとし、その作用は直接その物体が存在して居る当の場所の電場の性質だけに依って支配されるものであると解釈する。この際, 電場が如何なる方法で惹起されたか, あるいは他の場所に於ける電場の様子が如何であるかという事は毫も問う所でない。　電場はあらゆる方法で、しかもどんな物質内、あるいは流体内、あるいは固体内にでも、これを惹起せしめる事が出来る：この意味に於いて物質は皆 ”電媒質”であると見なして宜しい。ともあれ、電場は種々の物質内に於いて種々雑多の異なった性質を示す。しかも殊にその時間的変化に関してそれが著しい。

さて主問題は：或るきまった場所に於ける電場の有様をその電場が如何なる物質内に又如何なる方法で惹起されたかに関係なく表示するには、如何なる量を用いたら宜いかという事である。この問題を解決するには, 適当に準備した一つの小さな “ 試験用の物体 ” 例えば接骨木の髄心で作った小球を細い絹糸で吊るし、先づこの小球をあらかじめ摩擦して置いたエボナイト棒あるいは、このエボナイト棒を摩擦するに用いた猫皮に接触させる。かくの如き準備をなした小球を試験用の物体として電場内の着目している場所に持って来る。そしてこれに働く力学的の力を測る。その様にして電場内のすべての点につき測定を繰り返して行き、遂に全体の電場を探索し尽したならば、その暁に於いて電場は我々によつて完全に識られ、かつ定義されたものと考える。若し電場内のあらゆる点に於いて上に述べた力が等しい場合には、電場は ” 一様”[又は ” 均性”] であると云う。しかし一般には上述の力は, 大きさも方向も, 各点毎に変わっている。力は一つのベクトルで表わされるものであるから、我々は電場の有様を各点毎にあるベクトルを以って表示する事にする。これを “ 電場の強さ ”と云い E　で表わす。もっともこの際、上の方法で測定した力学的の力は, その大きさ

も、方向も共に当該電場の有様に依るばかりでなく，更になお試験用に用いた小球の性質にも依る事に留意せねばならぬ。即ち此の力は小球を準備した際に用いたエポナイト棒が強く摩擦されて居た場合程大きく、かつ試験用の小球を準備するに当って最初にエボナイト棒に接触せしめたのと猫皮に接触せしめたのとで力の作用する方向が正反対の向きになる。

そこで (これは逆の方向を採用した方が都合がよろしかったのであるが), 試験用の球を最初に猫皮に接触させて用いた場合に，小球に作用する力の向きの方を E の向きと定義する様になった。

［これで E の向きは定義されたが、次に] 電場の強さの絶対値 $|E|$ の定義はあまり簡単ではない。それに到達する道行として、電場のエネルギーの概念を述べよう。電場が幾らかの量のエネルギーを貯蔵して居る事は、電場が物体に運動を起させ得るのを以って見れば明かな事である。何故かというに、弾性体が変形のエネルギーの供給を受けて運動し出すのと同様に、エネルギー保存の一般原理に依れば上述の運動のエネルギーは必らず電場の電気エネルギーのみに依って供給されねばならぬからである。電場の起って居る空間内の無限微小部分に含まれた電気エネルギーと、その体積との比を電場の“電気エネルギー密度”と云う。これは力学的単位で表わし得る量で、もし電気的に中性な電場のエネルギーを 0 と置けば、これは正の量である。これに因んで電場の強さの絶対値の定義を下そうと云うのであるが、その為に今電気エネルギー密度は電場の強さの自乗：E^2 に比例し、かつ同時に“電媒常数”という媒質（例えば空気）の物質的性質のみに関係せる正の比例係数 ϵ に比例すると置く。ただし電媒常数の定義はここでは未だ保留して置く (後節§ 7 参照)

さて電気エネルギーの密度は実は $\frac{\epsilon}{2}\mathrm{E}^2$ に等しいと置くのが最も都合がよろしい。実際また理論物理学で特に使用するいわゆる有理単位系に於いてはこの置き方を用いて居る。しかし電気学の歴史的発達の行き掛り上では、電気エネルギーの密度は実用上から導入された或る単位で測り：

$$(1) \qquad \frac{\epsilon}{8\pi}\cdot E^2$$

なる値となる事になつて居り、又実験物理学や工業物理学に於ても今日なお当該単位を広く使用して居るので、本書でもまたそれに従う事とする。特にこれを採用して利する点は後なって始めてわかるであらう。

電場の強さ E の大きさ及び方向から、このベクトルの直角右手坐標系に関する成分 $E_x, E_y, E_z,$ がまた決まって来る。そこで, 電媒係数 ϵ なる均質物体内に於ける任意の電場のエネルギーの総量は, その物体の体積素片を $d\tau$ で表わせば:

$$(2) \qquad \frac{\epsilon}{8\pi}\int d\tau(E_x^2+E_y^2+E_z^2)$$

となる。

§ 3　磁場の強さ、磁気エネルギー、電磁場

電場に類似していて、しかも本質的に異なつでいるのが磁場である。磁場もまた種々の方法で生ぜしめる事が出来る。しかしここでは先づその生ぜしめ方如何は問わない事とし, 単に任意に与えられた磁場が如何なる特性を持つているかだけを調べて見よう，そしてこの磁場を探索するに際しての試験用の物体として重心の周りに自由に廻わり得る小さな磁針を使用する事とする。磁場が磁針に作用する力学的廻転能率を測れば、それに依って ”磁場の強さ” H を決定する手段が得られる。もし此の廻転能率が何所でも等しければ、磁場は ”一様 ” [又は“均性”] であると云う：一般に, 試験用の磁針が占めた方向、しかもその南極から北極の方へ向いた向きをベクトル H の向きと定義する。故に例えば地球の表面に於けるいわゆる地球磁場にあっては磁場の強さの方向は殆んど地理学上の北と一致する。

試験用の磁針に作用する回転能率の大きさは磁針の性質に依るものであるから、これから磁場の強さ H の絶対値を決定するわけには行かぬ：そこで我々は "磁気エネルギーの密度" を：

$$\frac{\mu}{8\pi}\cdot H^2 \qquad (3)$$

に等しいと置き、此の磁場のエネルギーから上述の絶対値を定義する事とする。但し上式の μ, 即ち物質の " 誘磁率" はある正の比例係数を表わす。

磁場の強さ H の大きさ及び方向から、このベクトルの直角右手坐標系に関する成分 H_x, H_y, H_z がまたきまって来る。そこで一定の誘磁率 μ を持った物体内に於ける任意の磁場のエネルギーの総量は：

$$\frac{\mu}{8\pi}\int d\tau(H_x^2+H_y^2+H_z^2) \qquad (4)$$

となる。

一般の場合には場は電場と磁場との両方の作用をなすので、かかる場を**電磁場**と云う。この場の内の各点に於ける電磁的状態は互に全く無関係な 2 つのベクトル E 及び H に依って表される；従ってまた電磁場のエネルギーの総量は (2) 式及び (4) 式の和として決まって来る。この意味に於いて宇宙全体はただ一個の電磁場であり、すべての電気的及び磁気的現象は皆この電磁場の変化に外ならぬ。かくして理論上の一般問題は結局, 空間のあらゆる点に於ける電場及び磁場の強さが、ある任意の時刻に於いて与えられた場合に、これからそれの時間的変化を計算する事に帰着してしまう。E 及び H なる両ベクトルには 6 つの互に無関係な量が含まれて居るのであるから、これ等を計算するには 6 つの方程式が必要になる。これら 6 つの微分方程式は「マックスエル」の理論の核心をなすものであって、これを次章で説明しよう。

第 二 章　電磁場の法則

§ 4.　電磁エネルギーの流れ

電磁場の微分方程式は純粋な演繹法では導き出すことが出来ないと考えられて居る。　しかしこれは、もしこの方程式に最初から含まれて居る要求、即ち第一にエネルギー保存の原理を満足すべきこと、第二に媒達作用の原理を満足すべきこと、と云うこの二要求から出発すれば、比較的容易に導き出すことが出来る。　今電磁場の起っている永久に静止せる均質物体内のある任意の部分を促えて考えよう。エネルギーの原理に依れば、この部分内の電磁エネルギーは、この部分内と外部の物体との間にエネルギーの交換が起るか、又はこの部分内に於ける他の型のエネルギーが変化を起すかに非らずんば、変化する事は出来ない。先ず最初に述べた場合、即ち外部からエネルギーが這入って来るか、又は周囲に向ってエネルギーを与える場合について考えよう。媒達作用の原理に依れば如何なる場合にも、問題の部分内のある場所に電磁エネルギーが周囲のある場所から飛び越えて這入って来る事は不可能で, 常に連続的の流れとなって外郎から問題の区域内に、その表面を過通して漸次に這入って来るよりほかはない。故に周囲とのエネルギーの交換は, あたかも流体の流れに似た, 空間の表面を通過するエネルギーの流れに依って支配される。そして各点に於けるこの電磁エネルギーの流れはその場所の電磁的状態、従ってその点の E 及び H の値に依って完全に決定される。時間素片 dt の間に面素片 $d\sigma$ をその法線 ν の方向の向きに通過して流れるエネルギーの量は $d\sigma$ 及び dt に比例するものであるから, 之を

$$S_\nu\cdot d\sigma\cdot dt \qquad (5)$$

に等しいと置き、S_ν なる有限の大きさをエネルギーの流れの ν なる方向に於ける成分と云う。そうすると，S は一つのベクトルである事が容易に証明出来る。今無限に小さい一つの四面体を考え、その３側面を各々坐標面に平行にし、しかもその各面の内向法線を各々正の坐標方向 x, y, z と一致させ, 第４側面の内向法線と ν として、この無限小四面体につきエネルギー保存の原理を適用すれば、dt 時間に外部から四面体の表面を通過して流れ入るエネルギー量は (5) に依り：

$$(S_x d\sigma_x + S_y d\sigma_y + S_z d\sigma_z + S_d \sigma)dt \qquad (6)$$

に等しい。但し各側面の面積は，各々：

$$d\sigma_x = -d\sigma cos(\nu_x), \qquad d\sigma_y = -d\sigma cos(\nu_y), \qquad d\sigma_z = -d\sigma cos(\nu_z), \qquad (7)$$

エネルギー原理に依れば,(6) 式は此の四面体内に含有せるエネルギーの総量が dt 時間内に受ける変化を示す。　しかるにこれは、常に四面体の体積に比例するから、これは空間の体積に関しては三次の無限小となり、一方 (6) 式は二次の無限小であるから,(6) 式は消滅して仕舞う。あるいはこれに (7) 式を加味して書き換えれば:

$$(8) \qquad S_\nu = S_x cos(\nu_x) + S_y cos(\nu_y) + S_z cos(\nu_z)$$

となる。　S_ν なる量は坐標軸の方向の各成分を S_x, S_y, S_z であるとして定義された S というベクトルの ν なる方向に於ける成分である。此の S というベクトルが即ち**電磁エネルギーの流れのベクトル**であって, 媒達作用論に依れば、電磁場内の各部の S はその場所に於ける２つのベクトル E 及び H に依りて決定される事になる。

§５.　「ポインティング」の法則

エネルギーの流れ S が電磁場の強さ E 及び H と如何なる関係があるかは経験に依って結論すべき事柄である。経験に依れば、此の関係は極めで簡単な法則に依って支配されるのであって、我々はこの方面に於けるあらゆる経験を集めた総括的の命題としてこの法則を電磁場の方程式を導き出すに当たっての冒頭に置く事とする：それはエネルギーの流れに関する「**ポインティング**の法則と云い, 曰く、**S は E と H とのベクトル乗積に比例する**というのである。即ち：

$$(9) \qquad S = \frac{C}{4\pi}[E, H]$$

(訳註)　　$[E, H]$ はベクトル積を表す

あるいは, 同じ意味で:

$$\left.\begin{array}{lcl} S_x &=& \frac{C}{4\pi}(E_y H_z - E_z H_y), \\ S_y &=& \frac{C}{4\pi}(E_z H_x - E_x H_z), \\ S_z &=& \frac{C}{4\pi}(E_x H_y - E_y H_z), \end{array}\right\} \qquad (10)$$

ここに C はある比例常数で, その値は E 及び H の単位の選び方に関係する。

§６. 電場及び磁場の強さの切線成分に関する限界条件

以上の事柄から, 此の際, 後になって使用する単位を決定する上に必要な事柄をはっきりきめて置こう。先づ既に述べた定義をここに纏めで見る。　其の為に一定の媒質内に於ける一定の電磁場

を捉えて考える。　此の電磁場内には各点に於いで一定の電気エネルギー (1), 一定の磁気エネルギー (2) 及び一定のエネルギーの流れ (9) が与へられてある。是等の量の測定は間接な方法でなければ出来ないけれども, 之でともかくもはっきりと確定せる而も力学的単位で表わす事の出来る量が三つ存在する事になった。是等の量には E 及び H といふ電磁場の強さを表はす二つの変数のほかに, 猶三つの比例常数 ϵ, μ 及び C が含まれて居るが、是等の大きさに就いでは未だ何事もきめてない。　従って上の三つの係数のうち, 二つは之を任意にきめて宜しく、そうすれば之に依って残りこの三つの量即ち二つの電磁場の強さ E 及び H 並びに第三の係数を三つのエネルギーの式に依つで完全に定義する事が出来るのである。　各媒質に就き、この定義は他の媒質に無関係に採って差支えないのであるから，上述の議論は各個々の媒質に就き別々に当て嵌めて宜しい。　さて種類の異なった媒質の間の関係は如何かというに、先づ、**媒質の種類が異なって居てもエネルギーの流れに関する比例常数 C は皆同じ大きさである**とするのが好都合である事が従来わかっている。その様にきめると便利であるという事は, 若しそう採れば異なった二つの媒質間の境界面に於ける限界條件の形が簡単になるという事から直ちに頷かれるのである。今かかる境界面上に面素片 $d\sigma$ を考え、此の $d\sigma$ の両側への法線方向の何れか一方を z 軸の方向に採れば, エネルギーの保存上 (5) に依り、境界面の両側に於いてエネルギーの流れの z 成分 S_z は同じ値を採らねばならぬ。何故というに, 若しそうでないとせば, 面素片 $d\sigma$ の内部でエネルギーが堰き止められて何処へも逃がれ去らないとか或は何処からか涌いて来るとかという事になる。　そこで, 今一方の媒質に関する量に肩符 ’ を附けて表わせば,$S_z = S'_z$ となる，なお上述の仮定に依って $C' = C$ であるから,(10) に依り：

$$E_x H_y - E_y H_x = E'_x H'_y - E'_y H'_x.$$

然るに各媒質内の電場及び磁場の強さの成分は互に全く無関係なのであるから, 一般に上の方程式が成り立つ為には, 常に：

$$E_x = E'_x, \, E_y = E'_y, \, H_x = H'_x, H_y = H'_y$$

でなければならぬ。従って τ を以て境界面に沿った切線の方向とすれば, 単に：

$$E_\tau = E'_\tau, H_\tau = H'_\tau$$

となる。故に二つの異なつた媒質間の境界面に於ける一般の限界條件を一つの定理として纏めると, **電場及び磁場の強さの切線成分は連続的**であるという事になる。

§ 7.　単位及びディメンション

若し総べての異種の媒質のうちで, 或る一つの媒質内に於ける電場及び磁場の強さが決まれば, 上に得た結果に依りそれ等総べての媒質内の電場及び磁場の強さが確定する事になる。　何故かというに, 電磁場の強さの方向だけは最初から既に確定して居るのであるから, その法線成分の大きさもまた切線成分の大きさから決まって来るからである。　故に定義を完成する為には, ただ, 基準として或る一つの決まった媒質を任意に採り、それに就いて ϵ, μ, C なる比例常数の内の二つを勝手に決めさえすれば宜しい。今その基準の媒質として所謂絶対真空を採用しよう。之は又 “ 純粋のエーテル” とも云う。　もっとも自然界には絶対真空は実在しない：絶対真空に最も近い媒質即ち天体間に介在する空間でさえも、到るところ確かに物質の残痕が浮かんでいる; 然るに電磁学の種々の経験から確証された最も重要な事実の一つとして, 物質に乏しい空間を漸次に稀薄にして行けば其の空間の電磁的性質はついによく指定し得る而も残存せる物質には全然無関係な一定の確然たる極限に近づくという事がわかって居る。そこでかかる極限的性質を持つ媒質を指して絶対真空と呼ぶのである。

真空の電媒常数を ϵ_0、誘磁率を μ_0 とする; 但し常数 C は總べての媒質につき同一であるから之には脚符を附けない事にしても宜しい。此の三つの常数の内で二つは任意に何とかきめて宜しい。従って今是等を＝1と置こう。そうすると第三の常数も其れからきまって来る。　さて上述の如き二つの常数としては何れを選ぶべきかというに, ここに三つの異った場合が可能になる。而して此の事から古典的の三種の電磁単位系が出て来る。

１．　ガウスの単位系

ガウスの単位系では,$\epsilon_0 = 1$ 及び $\mu_0 = 1$ と採る。従って,C は成るきまった値 c を採る事になる, その大きさの測定には種々の方法があるが, それは追々と判って来るであろう。此の常数 c は純粋の数ではない。　其のディメンションを知るには, ガウスの単位系では ϵ_0 及び μ_0 が純粋の数であるから，電場並びに磁場の強さは,(1) 及び (3) の両式に依り：

$$(12) \qquad \sqrt{\text{エネルギー密度}} = [m^{1/2} l^{-1/2} t^{-1}]$$

なるディメンションを持つという事を考えればよい。さてエネルギーの流れ S は (5) に依り $[mt^{-3}]$ なるディメションを持つから, 常数 c のディメンションは (9) 或は (10) に依り $[lt^{-1}]$ となる。故に c は速度のディメンションを持つ。即ち今質量, 長さ及び時の単位を変更したとき c の数値が受ける変化は丁度その数値が何時でも同一の速度を表わしている事になる様な具合に変化するのである。此の一定した速度のことを“ 臨界速度”と云う。その数値はその測定の第一法を説明する際に述べよう。

２，マックスエルの静電単位系

マックスエルの静電単位系では $\epsilon'_0 = 1$ 及び $C' = 1$ と採る。　然るときは, 電場の強さのディメンションは矢張り (12) となるが, 之に反して磁場の強さは今度はエネルギーの流れの式 (9) に依って計算せねばならぬ事となり，その結果、そのディメンションは：

$$[m^{1/2} l^{1/2} t^{-2}] \qquad (13)$$

となり、従って誘磁率 μ'_0 のディメンションは (3) に依り：$[l^{-2}t^2]$，即ち速度の自乗の逆数となる。

３．　マックスエルの電磁単位系

マックスエルの電磁単位系では $\mu"_0 = 1$ 及び $C" = 1$ と採る。即ち今度は, 電場の強さと磁場の強さとが役目を転倒し:電場の強さは (13) なるディメンションとなり、磁場の強さは (12) で表わされ, 電媒常数 $\epsilon"_0$ は速度の自乗の逆数となる。

或る一定の物理的の量を種々の単位系で表わしたときの各数値の間の定量的関係を見出すには, 真空内に一定の電磁場を考え, 其のエネルギーの大きさを三種の単位系で表わしたときの式を次の如く列記して見れば宜しい。而して単位系相互間の区別は矢張り肩符’ 及び” で示す事とすれば: 電気エネルギーの密度は (1) に依り

$$(14a) \qquad \epsilon_0 E^2 = \epsilon'_0 E'^2 = \epsilon"_0 E"^2$$

磁気エネルギーの密度は (3) に依り:

$$(14b) \qquad \mu_0 H^2 = \mu'_0 H'^2 = \mu"_0 H"^2$$

エネルギーの流れは (9) に依り:

$$(14c) \qquad C[E, H] = C'[E', H'] = C"[E", H"]$$

となる．但しここに三つのベクトル $E, H.S,$ の方向は三つの単位系で測っても皆同一であるという事を用いてある。

是等六つの式の中の各常数に各々前に述べた数値を代入すると, 簡単な計算の結果:

$$\epsilon"_0 = \frac{1}{c^2}, \mu'_0 = \frac{1}{c^2} \tag{15}$$

$$E = E' = \frac{E"}{c}, H = \frac{H'}{c} = H" \tag{16}$$

となり, 一見してわかる様に, 異種の単位系で表わした数値の間の差異は凡て臨界速度 c の問題に帰着して仕舞う。然るに方程式 (16) は真空に就いてのみならず, 限界條件 (11) に依り，如何なる媒質に就いても成立する，故に今任意の媒質に就き方程式 (14) を応用すれば [(14) に就いて, 脚符を除いたものと同じ式が成立し, 之に (16) を代入する事に依り］:

$$\epsilon = \epsilon' = c^2\epsilon", \mu = c^2\mu' = \mu" \tag{17}$$

を得る。凡そ電気力学で用いる概念は皆電磁場の強さ及び常数 ϵ､μ の概念から導来し得るものであるから, 方程式 (16) 及び (17) は種々の単位系の間の関係を解明する一般的の鍵であると云っても宜しい。

此処に述べた古典的の三つの絶対単位系のほかに、なお**実用単位系**というのがあるが, 是れはマックスエルの電磁単位系の親類筋ども言うべきもので, 唯それとの差異は実用上の立場から, その数値が 10 の或る乗べきだけ大になったり小になつたりして居るだけである，尚此の事に就いては其れに該当した場所で述べる，

現今理論的の書にはしばしば**ローレンツの有理単位系**というのが使用されでいるが、その特性はエネルギーの密度及びエネルギーの流れに関する (1),(3),(9) の式に於いて, 既にも述べた如く，分母に 4 π が欠けて居る事であって, 電媒常散及び誘磁率は全然ガウスの単位系と同様に定義するのである。　故に今ローレンツの有理単位系で測定した大きさを表わすに上に横線を附けて記する事とすれば:

$$\epsilon = \bar{\epsilon} \quad, \mu = \bar{\mu} \tag{18}$$

となり、従って (14) に於けると同様にしてガウス及びローレンツの単位系に関するエネルギーの方程式を作って計算すれば:

$$\frac{E}{\sqrt{4\pi}} = \bar{E}, \frac{H}{\sqrt{4\pi}} = \bar{H} \tag{19}$$

となり，エネルギーの流れにする常数 $\bar{C}$ は臨界速度 c に等しくなる。

異種の単位系で測った電気的及び磁気的の量のうちで最も重要なものの間の関係は巻末に列挙してある。本文中では混雑を避ける為め凡てガウスの単位系に従う事としよう。

一定の物理的の量を二種の単位系で表わすと其の数値のみならずディメンションまでが違うという事はしばしば論理上釈明を要する矛盾であるかの様に思われ, 中ん就く一つの物理的の量の“本当の”ディメンションは何であるかという様な質問をよく提起され勝ちである。かかる質問は或る対象物の“本当の”名称は何であるかという事以外には何等意味の無い質問であってここまで論述を進めて来た際、今更特に其の理由を表明する必要もあるまい。

§８.「ジュール」熱

§4 に於いて一物体内に所有せる電磁エネルギーの変化に対する原因を二つ挙げたが , 今そのうちの第二即ち:他の型のエネルギーに転換する事に就いて述べよう。此の方面に関する過去の総べ

ての経験を簡単な一個の定理に纏めると次の如くなる。　即ち：あらゆる媒質内に於いて:電気エネルギーは絶えず到る処で熱に転換しつつあって, 而も時間素片 dt の間に媒質の任意の体積素 $d\tau$ 内に於いて熱に変って行くエネルギーの量は, 其の瞬時に於ける其の場所の電気エネルギーの密度に比例する, 即ち：

$$dt \cdot d\tau \cdot \frac{\epsilon}{8\pi} E^2 \times \text{常数}$$

に等しい。　此のエネルギーの量は **”ジュール熱”** と称せられ, 此の現象は, 変形し得る不完全な弾性体の内部で弾性張力が次第に衰えて行く場合に弾性エネルギーが熱に移り行く現象と類似している事に着目すれば、いくらかその様子が了解出来るであろう。

ディメンションの上からの簡単な考えに依れば上式中に含まれた媒質の性質に関する比例の常数は時間の逆数を表わすことがわかる:依つで之を $\frac{2}{T}$ と置く事とする。こうするとジュール熱は：

$$dt \cdot d\tau \cdot \frac{\epsilon}{4\pi T} E^2 = dt \cdot d\tau \cdot \kappa \cdot E^2 \qquad (20)$$

である，但しここに:

$$\frac{\epsilon}{4\pi T} = \kappa \qquad (21)$$

とした。

T が大ならば大なる程, 電気エネルギーの消費は緩慢に行われる; 此の理由で T をまた其の媒質の“弛緩時間˝とも云う。T は金属ではすこぶる小さいが、気体では非常に大きく，絶対真空では $T = \infty$ となる, 即ち真空内に於いては, 恰も完全弾性体内に於ける弾性張力の場合と同様に, 電気エネルギーは永久無限に存続し得るのである。

磁気エネルギーに関しでは, 弛緩現象に似た現象は存在しない。

§９．「マックスエル」の根本方程式

さでこれで§4 に述べた考察法を進める準備が調ったから之から、いよいよ一般の電磁場の方程式をエネルギー原理に立脚して導き出そう。均質な物体内の任意の体積部分内に存在せる電磁エネルギーが時間素片 dt の間に受ける変化は (2) 及び (4) に依り

$$(22) \qquad \frac{dt}{4\pi}\int d\tau \cdot \left\{\epsilon(E_x\dot{E}_x + E_y\dot{E}_y + E_z\dot{E}_z) + \mu(H_x\dot{H}_x + H_y\dot{H}_y + H_z\dot{H}_z)\right\}$$

である。

此の変化を起こさせる原因の第一は同じ時間内に此の領域の表面を貫通して外部から内部へ流れ込むエネルギー (5) に依るもので, その総量は：

$$(23) \qquad dt \cdot \int d\sigma S_\nu$$

である。原因の第二は同じ時間内にそこに生じた熱量 (20) に依るもので, その総量は:

$$(24) \qquad dt \cdot \int d\tau \kappa E^2$$

である, 而して (22) 式は (23) 式から (24) 式を減じた差に等しくなければならぬ。

そこで表面積分 (23) を体積積分に転換すれば:

$$(25) \qquad \int d\sigma S_\nu = -\int d\tau \left(\frac{\partial S_x}{\partial x} + \frac{\partial S_y}{\partial y} + \frac{\partial S_z}{\partial z}\right) = -\int d\tau\, div S$$

となり、次に総べての量を方程式の左辺に移項して唯一つの体積積分に纏めて考えると，上の体積は幾らでも任意に小さいものを採っても宜しいという理由に依り、$d\tau$ の掛かって居る量は 0 にならねばならぬ事がわかる。　斯くて：

$$\frac{\epsilon}{4\pi}(E_x\dot{E}_x+E_y\dot{E}_y+E_z\dot{E}_z)+\frac{\mu}{4\pi}(H_x\dot{H}_x+H_y\dot{H}_y+H_z\dot{H}_z)+\frac{\partial S_x}{\partial x}+\frac{\partial S_y}{\partial y}+\frac{\partial S_z}{\partial z}+\kappa(E_x^2+E_y^2+E_z^2)=0 \qquad (25a)$$

を得る, 此の中のエネルギーの流れのベクトル $\mathbf{S}$ は (9) に依り「ガウス」の単位系で表わせば:

$$\mathbf{S}=\frac{c}{4\pi}[\mathbf{E},\mathbf{H}] \qquad (26)$$

で与えられる．　此の一般に成立すべき方程式 (25a) は 6 つの電場磁場の強さ及びそれ等の導函数 (或は微 (分) 係数ともいう) に関して同次の二次方程式になって居る。此の式から電磁場に関する 6 つの同次の一次微分方程式を出そうというのであるが, それには此の式の中に於ける 6 つの電場磁場の成分 $E_x, E_y, E_z, H_x, H_y, H_z$ の掛かって居る量を各々0 に等しいと置けば宜しい。その様にして 6 つの方程式:

$$\epsilon\dot{E}_x=c\Big(\frac{\partial H_z}{\partial y}-\frac{\partial H_y}{\partial z}\Big)-4\pi\kappa E_x, ...,$$

$$\mu\dot{H}_x=-c\Big(\frac{\partial E_z}{\partial y}-\frac{\partial E_y}{\partial z}\Big), ...,$$

が得られる, 或は之をベクトルの形で表わせば:

$$(27a) \qquad \epsilon\dot{\mathbf{E}}=c\,rot\mathbf{H}-4\pi\kappa\mathbf{E}$$

$$(27b) \qquad \mu\dot{\mathbf{H}}=-c\,rot\mathbf{E}$$

となる。これが静止せる均質で等方な物体内の電磁場に関するマックスエルの根本方程式である，かかる物体に於ける電気的並びに磁気的現象に関する法則は, 後で示す通り, 皆此の方程式と限界條件 (11) とから一価的に導き出されるのである。

簡略の為め:

$$(28) \qquad \epsilon\mathbf{E}=\mathbf{D}$$

$$(29) \qquad \kappa\mathbf{E}=\mathbf{J}$$

$$(30) \qquad \mu\mathbf{H}=\mathbf{B}$$

なベクトルを採用する事とすれば, 電磁場の方程式は：

$$(31a) \qquad \dot{\mathbf{D}}=c\,rot\mathbf{H}-4\pi\mathbf{J}$$

$$(31b) \qquad \dot{\mathbf{B}}=-c\,rot\mathbf{E}$$

なる形となる。此の式の特徴は, 最早や物体特有の性質に関する常数を含んでいない。即ち一般普遍的の性質を帯びた方程式であるという事である。故に此の方程式の形は, 連続的の広がりを持ち且つ静止せる物体でありさえすれば, どんな不均質な又は不等方な物体にでも使用し得る形となっている。. 実際にも，此の方程式は上述の制限のもとにあらゆる場合、例えば結晶光学等に応用しても当て嵌まる事が確かめられて居る。